ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU MARDI 4 JUIN 1917.

PRÉSIDENCE DE M. A. D'ARSONVAL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE DES SEMI-FLUIDES. — *Intercalation d'un massif sablonneux homogène donné, mais dont l'état ébouleux a ses équations inintégrables, entre deux certains massifs hétérogènes de même figure, qui se prêtent facilement aux calculs d'équilibre-limite.* Note de M. J. **Boussinesq**.

I. J'ai montré, dans une Note du 14 mai [1], que certains massifs sablonneux *fictifs*, à profil supérieur rectiligne faisant un angle donné ω au-dessus de l'horizon, soutenus par un mur à profil également rectiligne coupant le profil superficiel précédent en un point O du plan vertical des xy qu'ils déterminent ensemble, peut affecter, au voisinage du mur, un angle variable φ' de frottement intérieur, réglé juste de manière à y rendre facile le calcul de l'état ébouleux ou d'équilibre-limite et, par suite, celui de la poussée correspondante éprouvée par le mur; tandis que ces calculs seraient, au contraire, inabordables pour le massif de même figure, mais *censé homogène*, que les ingénieurs ont à considérer le plus souvent dans la pratique. Et alors la poussée-limite que celui-ci exerce sur son mur de soutènement semble ne pouvoir être évaluée, ou tout au moins *appréciée*, qu'en intercalant le massif réel entre deux massifs fictifs de pareille forme, dont l'un résisterait plus que lui à l'éboulement, grâce à des angles de frottement intérieur et extérieur partout aussi grands ou plus grands que le sien, et dont l'autre résisterait moins que lui, grâce à des angles de frottement partout égaux au sien ou moindres. On pourra admettre, en effet, que les poussées directement évaluables de ces deux massifs fictifs fourniront deux limites, respectivement inférieure et supérieure, comprenant ou

---

(1) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 760.

encadrant entre elles sa propre poussée. Et il faudra tâcher de resserrer assez ces limites, pour qu'elles en constituent deux valeurs, l'une, *par défaut*, l'autre, *par excès*, réellement approchées.

II. Je me bornerai ici, pour simplifier et fixer les idées, au cas assez ordinaire d'un mur vertical, où la coupe suivant xOy de tous nos massifs occupera, entre la verticale descendante (profil du mur) émanée de l'origine et le profil du talus supérieur pris pour axe des y, l'espace angulaire $\omega + \frac{\pi}{2}$ (l'axe des x faisant l'angle ω avec cette verticale). Nous y définirons les divers points (x, y) du massif au moyen du rayon vecteur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et de son angle polaire ou *azimut* θ donnant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, azimut ainsi compté à partir de l'axe des x.

Cela posé, chaque massif fictif sera homogène assez loin du mur, ou aura un certain angle *constant* φ de frottement, depuis le profil supérieur jusqu'au rayon vecteur r qui fait avec la verticale descendante l'angle particulier δ défini par la formule

$$\delta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\omega' - \omega}{2}, \tag{1}$$

où ω' désigne l'angle aigu, plus grand que ω, dont le sinus a la valeur

$$\sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Nous appellerons θ_0 l'azimut $\delta - \omega$ de ce premier rayon vecteur au-dessous duquel l'angle partout continu de frottement intérieur deviendra une fonction φ' de θ graduellement croissante, à mesure que θ s'abaissera jusqu'à la valeur négative $-\omega$ atteinte au contact du mur, ou à mesure que $\theta_0 - \theta$ grandira de zéro à δ.

La valeur la plus forte Φ de φ', réalisée pour $\theta_0 - \theta = \delta$, sera reliée à un angle aigu positif auxiliaire ε, tel que

$$\frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varepsilon}, \tag{3}$$

et qui caractérisera l'écart relatif de Φ à φ.

Quant aux autres valeurs de φ', intermédiaires entre φ et Φ, elles résulteront de la formule (10) de la Note citée,

$$\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi} = 1 + \left[\frac{c\cos\varphi\cos\theta_0\sin(\theta_0 - \theta)}{\cos\varphi\cos\theta - c\sin\varphi\cos\theta_0\sin(\theta_0 - \theta)}\right]^2, \tag{4}$$

où c est une constante à déterminer par la condition que les équations (11) de la même Note donnent sur le mur vertical (pour $\theta_0 - \theta = \delta$) une poussée inclinée sous l'horizon de l'angle φ_1 du frottement extérieur.

En tenant compte de (3), on trouve ainsi

$$(5) \qquad c = \frac{\cos\varphi \cos(\theta_0 - \delta)}{\cos(\varphi - \varepsilon)\cos\theta_0} \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}, \qquad \frac{\tang\varphi_1}{\sin\varphi} = \frac{\cos(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}{\cos\varepsilon - \sin\varphi \sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}.$$

Enfin, dans le cas simple $\varphi_1 = \varphi$, la formule (14) de la même Note donne $\varepsilon = \delta$, et la précédente (13) fait connaître la poussée-limite $\mathfrak{P}$ alors exercée sur le mur par unité d'aire,

$$(6) \qquad \mathfrak{P} = \Pi r \frac{\cos\omega \cos^2(\varphi + \delta)}{\cos(\omega - \delta)\cos(\varphi - \delta)}.$$

III. En général, on obtiendra une assez bonne limite *inférieure* pour la poussée d'un massif homogène, en prenant, dans cette formule (6), φ et φ_1 égaux à l'angle connu de frottement intérieur de ce massif, puisque le massif hétérogène fictif auquel cette formule conviendrait rigoureusement ne diffère du massif réel que par des coefficients $\tang\varphi'$ de frottement intérieur des couches sablonneuses contiguës au mur, un peu plus grands que $\tang\varphi$, dans des rapports dont l'inverse est compris entre 1 et $\cos\delta$, ou qui n'excèdent guère l'unité que de 6 pour 100 au plus, même quand δ acquiert une valeur aussi forte que 20°.

Et la même formule (6) fournira une limite supérieure souvent presque aussi bonne de la poussée cherchée, en observant que l'équation (3) peut s'écrire, d'après (1) où δ n'est autre que ε,

$$(7) \qquad \frac{1}{\sin\varphi}\cos\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\omega + \arc\sin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right)\right] = \frac{1}{\sin\Phi},$$

puis en attribuant par tâtonnement à φ, dans le premier membre de (7), une valeur telle qu'il en résulte précisément pour Φ, au second membre, l'angle de frottement donné du massif homogène. Car, alors, le massif fictif aura toutes ses couches moins résistantes à l'éboulement que le massif réel, à l'exception de sa couche touchant le mur qui a bien l'angle de frottement Φ, mais où le frottement extérieur sera supposé, lui aussi, moindre qu'il n'est en réalité. Le massif exercera donc une poussée plus forte que la poussée réelle.

Le tâtonnement sera même supprimé pour un *terre-plein horizontal*, cas où l'on a, dans (1),

$$\omega = 0, \qquad \omega' = 0, \qquad 2\cos^2\delta = 1 + \sin\varphi$$

et où il vient, par suite, en résolvant une équation du second degré,

$$\sin\varphi = \frac{\sin\Phi}{4}\left(\sin\Phi + \sqrt{8+\sin^2\Phi}\right). \tag{8}$$

Ce cas simple d'un terre-plein horizontal est, d'ailleurs, plus désavantageux pour la méthode que celui d'un talus montant; car δ y atteint de plus fortes valeurs (jusqu'à $22°,5$ pour $\Phi = 45°$) et l'hétérogénéité des massifs fictifs s'y accuse davantage.

IV. Un autre inconvénient de la limite supérieure ainsi obtenue est l'altération de la direction de la poussée, celle-ci n'y faisant pas avec la normale au mur (tirée hors du massif) son véritable angle de frottement extérieur Φ. Il peut donc être désirable d'obtenir une autre limite supérieure, où l'on n'aurait plus $\varepsilon = \delta$, ni $\varphi_1 = \varphi$, mais plutôt $\varphi_1 = \Phi$, afin que les deux limites entre lesquelles on intercale la poussée effective expriment deux forces de même direction qu'elle, ou n'en différant que par la grandeur, *non par la qualité*, et lui soient mieux comparables. Alors l'équation (3) devient

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon}, \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{\tan\varphi_1}{\sin\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\varepsilon - \sin^2\varphi}; \tag{9}$$

et la seconde équation (5) élevée au carré, d'où l'on éliminera le rapport $\frac{\tan^2\varphi_1}{\sin^2\varphi}$, devient aisément, par quelques réductions suivies d'une extraction exacte de racine carrée [1],

$$\sin(\varphi + 2\delta - \varepsilon) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varepsilon} = \sin\Phi; \qquad \varphi + 2\delta - \varepsilon = \Phi. \tag{10}$$

Substituons à 2δ, dans la dernière (10), sa valeur, tirée de (1), et, en isolant ω', puis portant dans (2) l'expression de ω' obtenue, nous trouverons

$$\cos(\varphi + 2\delta - \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}. \tag{11}$$

---

[1] Ces calculs montrent aussi que, si l'on divise le dernier membre de la seconde (5), élevé au carré, par le dernier de (9), il vient identiquement

$$\frac{\tan^2\varphi_1}{\tan^2\Phi} = 1 - \left[\frac{\sin\varphi - \cos\varepsilon\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}{\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}\right]^2$$

et que Φ est le maximum de φ_1.

Multiplions maintenant celle-ci par $\cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}$. Il vient

$$\cos\varepsilon\cos(\varphi + 2\delta - \omega) = \frac{\sin\omega}{\sin\Phi}. \tag{12}$$

Enfin, remplaçons $\varphi + 2\delta$, d'après la dernière (10), par $\Phi + \varepsilon$; et, en substituant au produit de deux cosinus la demi-somme de deux cosinus, nous aurons

$$\cos(\Phi - \omega + 2\varepsilon) = 2\frac{\sin\omega}{\sin\Phi} - \cos(\Phi - \omega), \tag{13}$$

relation à second membre tout connu, qui permettra d'obtenir $\Phi - \omega + 2\varepsilon$ ou, par suite, l'inconnue ε.

On en déduira φ par la formule $\sin\varphi = \sin\Phi\cos\varepsilon$, puis δ par (11). Après quoi, la dernière (10) fournira une vérification de tous les calculs.

Enfin, la limite supérieure correspondante de la poussée par unité d'aire, que nous appellerons $\mathfrak{P}'$ afin de la distinguer de la limite inférieure (6), sera

$$\mathfrak{P}' = \Pi r \cos\varepsilon\cos(\varphi + \delta)\frac{\cos\omega\cos(\varphi + 2\delta - \varepsilon)}{\cos(\omega - \delta)\cos(\varphi - \varepsilon)}. \tag{14}$$

V. Les formules précédentes s'appliquent aisément au cas d'un terre-plein horizontal, pratiquement le plus simple et le plus important, mais ici le plus défavorable au point de vue du resserrement des limites, en raison des fortes valeurs qu'y atteignent δ, ε et les degrés d'hétérogénéité des massifs fictifs.

L'angle ω s'y annulant, 2δ y est le complément de φ; et l'on trouve d'abord, pour la limite inférieure $\mathfrak{P}$, la valeur $\Pi r \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi(1 + 2\sin\varphi)}$. Si, par exemple, φ égale 45°, le coefficient de Πr y est

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2} = 0,1716 \text{ environ.}$$

Quant au calcul de la limite supérieure $\mathfrak{P}'$, la formule (13) y donne

$$\Phi + 2\varepsilon = \pi - \Phi \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} - \Phi;$$

et l'on trouve ensuite

$$\sin\varphi = \sin^2\Phi, \qquad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

enfin

$$\mathfrak{P}' = \Pi r \frac{\sin\Phi\cos\Phi}{\sin(\Phi+\varphi)} \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour $\Phi = 45°$, il vient

$$\varphi = 30°, \qquad \sin(\Phi+\varphi) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad \mathfrak{P}' = \Pi r \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}.$$

Le coefficient numérique de Πr y revient à

$$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} = 0,2989,$$

fraction dont l'excès sur la limite inférieure 0,1716 atteint presque les trois quarts de celle-ci.

VI. Heureusement qu'on se borne en général, surtout dans les expériences de laboratoire, à étudier des équilibres-limite *de rotation* où les murs sont des parois mobiles autour d'un axe fixe horizontal connu, et où la poussée ne figure dans l'équation du phénomène que par son *moment*. C'est donc ce moment seul ou, ce qui revient au même, une *certaine* composante de la poussée, qui a de l'importance et qu'il s'agit d'intercaler entre deux limites peu distantes. J'espère montrer prochainement qu'on y réussit assez bien, même dans ce cas désavantageux d'un terre-plein horizontal.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection des deux Membres de la *Commission de vérification des comptes de l'année* 1916.

MM. **H. Deslandres** et **A. Dastre** réunissent la majorité des suffrages.

CORRESPONDANCE.

M. le **Ministre de la Guerre** annonce à l'Académie qu'il a nommé M. C. Jordan Membre du *Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, pour la durée des hostilités, en remplacement de M. *H. Léauté*, décédé.

M. **Albert Robin** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à l'une des places vacantes dans la Section des Académiciens libres.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Deux conférences sur la Nomographie, par Maurice d'Ocagne. I. *Principes de Nomographie*. II. *Application des nomogrammes à alignement aux différents cas de résolution des triangles sphériques*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la représentation conforme.* Note de M. **Paul Montel**.

1. *Représentation conforme de l'intérieur d'un domaine simplement connexe.* — Considérons des ensembles (D), en nombre infini : je dirai qu'un point P est *uniformément intérieur* à une infinité d'ensembles (D) si ce point est le centre d'un cercle intérieur à chacun de ces ensembles. L'ensemble des points P uniformément intérieurs à une infinité des ensembles (D) s'appellera l'*ensemble limite complet intérieur* (D_C) des ensembles (D). L'ensemble des points P uniformément intérieurs à tous les ensembles (D), sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, s'appellera l'*ensemble limite restreint intérieur* (D_R) des ensembles (D). Si les ensembles (D_C) et (D_R) coïncident, nous dirons que les ensembles (D) admettent un *ensemble limite intérieur* (D_C) ou (D_R).

Supposons que les ensembles (D) soient des domaines simplement connexes bornés dans leur ensemble et contenus dans le plan de la variable complexe Z et soit $f(z)$ une fonction faisant la représentation conforme, sur l'intérieur de (D), de l'intérieur du cercle (d) de rayon *un* contenu dans le plan de la variable complexe z. Les fonctions $f(z)$ correspondant aux différents domaines (D) sont bornées dans leur ensemble : elles forment une famille normale et toute suite infinie de ces fonctions admet au moins une fonction limite $F(z)$.

Toute fonction limite $F(z)$ *fait la représentation conforme de l'intérieur du cercle* (d) *sur l'intérieur d'un domaine* (D') *dont tous les points appartiennent à* (D_C).

Inversement, tout domaine formé de points de (D_C) *fait partie d'un domaine* (D') *correspondant à une fonction limite* $F(z)$, *pourvu qu'il existe dans le premier domaine un point* P *dont les correspondants sur* (d) *admettent au moins un point limite intérieur à* (d).

On déduit aisément du résultat précédent que tout domaine ouvert simplement connexe, borné ou non, du plan des Z peut être représenté d'une manière conforme sur le domaine ouvert du cercle (d) de rayon *un*, de manière qu'à un élément de contact intérieur à (D) corresponde un élément de contact intérieur à (d) arbitrairement choisi [1].

2. *Correspondance entre les points frontières.* — La représentation conforme du domaine ouvert simplement connexe (D) sur le domaine ouvert (d) est, comme on sait, complètement déterminée par la condition que deux éléments de contact, arbitrairement choisis dans (D) et (d), se correspondent. L'étude de la correspondance qui en résulte pour les points des frontières (C) et (c) de ces domaines a été faite par Riemann lorsque (C) est formée par un ou plusieurs arcs analytiques. Le cas d'un contour non analytique a été étudié d'abord par M. Painlevé [2], puis, dans le cas général, par M. Carathéodory [3].

On peut faire cette étude en utilisant seulement les théorèmes généraux de la théorie des fonctions analytiques et en leur adjoignant la proposition suivante :

Soit $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ *une suite infinie de fonctions analytiques bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine connexe* (Δ). *Si cette suite converge uniformément sur un arc* (γ) *arbitrairement petit du contour limitant le domaine, elle converge aussi uniformément dans tout domaine intérieur à* (Δ) *et dont la frontière peut comprendre des portions de* (γ).

---

(1) Ce dernier théorème a déjà été établi par M. Osgood, par une voie différente [*On the existence of Green's function for the most general simply connected plan region* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 1900, p. 310)]. En utilisant des suites normales de fonctions, M. Carathéodory a démontré cette même proposition pour certains domaines simplement connexes [*Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten* (*Math. Annalen*, 1912, p. 107)].

(2) *Sur la théorie de la représentation conforme* (*Comptes rendus*, t. **112**, 1891, p. 653).

(3) *Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordan'schen Kurve auf einen Kreis* (*Math. Annalen*, 1913, p. 305) et *Ueber die Begrenzung einfachzusammenhängender Gebiete* (*Math. Annalen*, 1913, p 323).

Ce théorème, qui est une généralisation nouvelle d'une proposition classique de Weierstrass, permet de montrer d'abord qu'à tout point accessible Z_0 de (C) correspond un point z_0 de (c) tel que $f(z)$ ait pour limite Z_0 lorsque z tend vers z_0 par un chemin quelconque intérieur à (c). On établit, en effet, que, dans le cas contraire, $f(z)$ aurait pour limite la constante Z_0 sur un arc de (c). C'est l'extension au cas d'un point accessible quelconque, de la méthode que M. Picard [1] a fait connaître pour un point Z_0 commun à deux arcs analytiques distincts de (C). On déduit aisément de ce qui précède l'étude du cas où tous les points du contour sont accessibles et, en particulier, que la représentation conforme d'un domaine limité par une courbe simple de Jordan sur un cercle est biunivoque et continue pour les points des frontières, c'est-à-dire pour les domaines fermés.

Le même théorème permet l'étude de la correspondance entre les frontières pour les points z_0 de (c) tels que le domaine d'indétermination de $f(z)$, lorsque z tend vers z_0 par des chemins intérieurs à (d), ne se réduise pas à un point. Soit F l'ensemble des valeurs limites obtenues; cet ensemble, qui est un continu linéaire, est la somme de l'ensemble F_0 des valeurs limites de $f(z)$ sur tout chemin non tangent en z_0 à la circonférence et d'un autre ensemble F'_0. Le continu F forme un *bout* de la frontière (C); sur ce bout, les points P_0 de F_0 sont des points principaux et les points de F'_0 sont des points accessoires. Les premiers se distinguent des autres par la propriété suivante : il existe une infinité de coupures du domaine (D), ayant pour limite le point P_0 et dont chacune sépare ce point d'un point fixe arbitrairement choisi dans (D) [2].

Imaginons une suite infinie d'arcs de courbes (l_0), (l_1), ..., (l_n), ..., intérieurs à (d), aboutissant en z_0 d'un même côté du diamètre passant en ce point, et tels que l'ordre de contact de ces courbes avec le cercle (c) croisse avec n. Si F_n désigne l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur l'arc (l_n), on a les inégalités $F_0 \leqq F_1 \leqq F_2 \leqq \ldots \leqq F_n \leqq \ldots$. On peut donc dire que *l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur des arcs de courbes aboutissant en z_0 s'accroît de plus en plus quand augmente l'ordre du contact de ces courbes et du cercle.*

---

[1] *Cours à la Faculté des Sciences de Paris en* 1888. *Traité d'Analyse,* 1re édition, 1893, et 2e édition, t. II, p. 307.

[2] Voir Carathéodory, *loc. cit.*, et Lindelöf, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, 1915).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques problèmes qui impliquent des fonctions non mesurables.* Note de M. W. Sierpiński.

Nous dirons qu'un problème implique des fonctions non mesurables, si, en admettant ce problème résolu (affirmativement), on en déduit *sans l'axiome du choix* l'existence des fonctions non mesurables. Par exemple le problème d'existence d'un ensemble bien ordonné ayant la puissance du continu implique des fonctions non mesurables.

Le but de cette Note est d'appeler l'attention sur quelques autres problèmes de la théorie des ensembles et certaines questions d'analyse qui impliquent l'existence des fonctions non mesurables.

On regarde dans la théorie des ensembles comme bien démontré que l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables du continu a la puissance du continu. Or, nous allons démontrer que ce problème implique des fonctions non mesurables.

Admettons, en effet, que l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables du continu a la puissance non supérieure à celle du continu. Il existe donc une correspondance d'après laquelle à tout ensemble dénombrable de nombres réels E correspond un nombre réel $f(E)$, de telle sorte qu'aux ensembles E différents correspondent toujours des nombres $f(E)$ différents.

Soit maintenant x un nombre réel donné. Désignons par $E(x)$ l'ensemble de tous les nombres $x+r$, r étant un nombre rationnel quelconque : on voit sans peine que ce sera un ensemble dénombrable et que nous aurons toujours $E(x)=E(x')$ pour $x-x'$ rationnel et $E(x)\neq E(x')$ pour $x-x$ irrationnel.

A tout nombre réel donné x correspondra donc un nombre réel $\varphi(x)=f[E(x)]$, et il suit des propriétés de $E(x)$ et $f(E)$ que nous aurons $\varphi(x)=\varphi(x')$ pour $x-x'$ rationnel et $\varphi(x)\neq\varphi(x')$ pour $x-x'$ irrationnel.

Or, je dis que toute fonction $\varphi(x)$ jouissant de cette propriété est non mesurable [1].

Admettons, pour le démontrer, que $\varphi(x)$ est mesurable et posons $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(-x)$: ce sera donc aussi une fonction mesurable.

---

[1] M. H. Lebesgue a démontré cela pour une classe particulière de fonctions $\varphi(x)$ [pour lesquelles $\varphi(x)-x$ est toujours rationnel] (voir *Bull. Soc. math. de France*, t. 35, p. 210).

Désignons par N l'ensemble de tous les nombres réels x satisfaisant à l'inégalité $\psi(x) > 0$: la fonction $\psi(x)$ étant mesurable, l'ensemble N le sera donc aussi.

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble N est non mesurable dans tout intervalle. Désignons, en effet, par Q l'ensemble de tous les nombres irrationnels n'appartenant pas à l'ensemble N : pour tout x de Q nous aurons $\psi(x) < 0$ et réciproquement, ce qui résulte de la définition de l'ensemble N et de la remarque que l'égalité $\psi(x) = 0$, c'est-à-dire $\varphi(x) = \varphi(-x)$, subsiste, d'après les propriétés de $\varphi(x)$, pour x rationnel et seulement pour x rationnel. Je dis maintenant que pour tout r rationnel et tout x irrationnel, des deux nombres x et $2r - x$, l'un appartient à N et l'autre à Q : pour le prouver, il suffit de remarquer que, d'après la définition de $\psi(x)$ et la propriété de $\varphi(x)$, nous avons toujours pour r rationnel $\psi(2r - x) = -\psi(x)$. Or, tous les nombres de N et de Q sont irrationnels, puisque pour x rationnel nous avons $\psi(x) = 0$. Donc les ensembles N et Q sont images symétriques l'un de l'autre, pour tout point à abscisse rationnelle r comme centre de symétrie.

Soit maintenant (a, b) un intervalle donné quelconque et admettons que la partie de l'ensemble N contenue dans (a, b) est mesurable. Or, soit (a_1, b_1) un intervalle aux extrémités rationnelles contenu dans (a, b), d'ailleurs quelconque, et désignons par N_1 et Q_1 les parties respectives de N et Q contenues dans (a_1, b_1) : N_1 sera donc un ensemble mesurable. Les ensembles N_1 et Q_1 sont superposables, comme images symétriques l'un de l'autre [le milieu de (a_1, b_1) étant le centre de symétrie] : donc ils ont la même mesure et cette mesure sera égale à la moitié de la longueur de (a_1, b_1), puisque les points de (a_1, b_1) n'appartenant ni à N ni à Q (comme rationnels) font un ensemble dénombrable.

Il s'ensuit qu'on pourrait décomposer l'intervalle (a, b) en deux ensembles qui ont la même mesure dans tout intervalle aux extrémités rationnelles, contenu dans (a, b). Or, comme on sait, on démontre sans peine (sans l'axiome du choix) que c'est impossible.

Nous avons donc démontré que la fonction $\varphi(x)$ ne peut être mesurable. Le problème sur la puissance de l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables du continu implique donc des fonctions non mesurables.

On regarde aussi comme bien démontré que l'ensemble de toutes les fonctions de la deuxième classe de M. Baire a la puissance du continu. Or nous démontrerons que ce problème implique des fonctions non mesurables.

Admettons, en effet, que l'ensemble de toutes les fonctions de la

deuxième classe de M. Baire a la puissance du continu : je dis qu'il en résulte, sans l'axiome du choix, que l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables du continu a une puissance non supérieure à celle du continu.

Soit D un ensemble dénombrable de nombres réels. Désignons par $f_D(x)$ une fonction d'une variable réelle qui est égale à 1 pour tous les points x de D et égale à 0 pour tous les autres x : ce sera évidemment une fonction de la première ou deuxième classe dans la classification de M. Baire. A tout ensemble dénombrable D de nombres réels correspond donc une fonction $f_D(x)$ déterminée et aux ensembles D différents correspondront évidemment des fonctions $f_D(x)$ différentes. Donc il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables du continu et un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les fonctions de la première et deuxième classe de M. Baire.

D'après notre hypothèse l'ensemble de toutes les fonctions de la deuxième classe a la puissance du continu; or il résulte (sans l'axiome du choix) des recherches de M. Baire sur les fonctions discontinues que l'ensemble de toutes les fonctions de la première classe a la puissance du continu. L'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables du continu aurait donc une puissance non supérieure à celle du continu, ce qui implique des fonctions non mesurables, comme nous l'avons démontré plus haut.

Nous avons donc démontré que le problème sur la puissance de l'ensemble de toutes les fonctions de la deuxième classe de M. Baire implique des fonctions non mesurables. Il en est de même, à plus forte raison, pour l'ensemble de toutes les fonctions représentables analytiquement. Nous pouvons donc affirmer que *l'existence des fonctions non mesurables est aussi bien démontrée que le théorème d'après lequel l'ensemble de toutes les fonctions représentables analytiquement a la puissance du continu.*

Je finirai en signalant encore un problème qui implique des fonctions non mesurables : c'est le problème d'existence d'un ensemble ordonné ayant la même puissance que l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle.

ASTRONOMIE. — *Éléments de la comète* 1917 *b* (*Schaumasse*). Note de MM. **G. Fayet** et **A. Schaumasse**, présentée par M. B. Baillaud.

Les observations utilisées sont celles obtenues les 25 avril, 8, 14 et 22 mai 1917, par M. Schaumasse, à l'aide de l'équatorial coudé (0^m,40 d'ouverture) de l'Observatoire de Nice.

Plusieurs orbites ont été calculées, dont une sans faire d'hypothèse sur l'excentricité, mais la parabole apparaît encore suffisante pour représenter d'une manière satisfaisante les observations considérées.

Voici les éléments paraboliques qui paraissent les meilleurs :

$$T = 1917 \text{ mai } 18{,}2102, \text{ temps moyen de Greenwich.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Omega = 9^\circ.40'.\ 6'' \\ i = 158.43.39 \\ \omega = 119.\ 9.10 \end{array}\right\} 1917{,}0$$

$$\log q = 9{,}883198$$

Représentation des lieux intermédiaires :

	O. — C.	
	$\cos\beta\, d\lambda$.	$d\beta$.
1917. Mai 8.........	+5″	—4″
» » 14.........	+3″	—3″

CHIMIE PHYSIQUE. — *Influence de la vitesse de refroidissement sur la température de transformation et la structure des aciers au carbone.* Note [1] de MM. **Portevin** et **Garvin**, présentée par M. Henry Le Chatelier.

On sait, depuis les travaux d'Osmond, que les températures de transformation au refroidissement d'un acier au carbone se trouvent abaissées lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, on fait croître la vitesse moyenne de refroidissement, et ceci dans une mesure et d'une manière que l'on ignore, surtout lorsque cette vitesse devient comparable à celles que l'on obtient en trempant de petits échantillons dans l'eau (intervalle 700°-100° < 10 secondes). En d'autres termes on ne connaît pas, pour les aciers au carbone, la position, dans l'échelle des températures, de la transformation lors de la trempe en fonction de la vitesse de refroidissement; cela tient aux difficultés expérimentales que présente l'étude thermique des refroidissements de faible durée totale.

Les travaux de M. Le Chatelier, continués par ceux de MM. Lejeune et Benedicks, avaient spécialement pour but de connaître l'influence des conditions de trempe sur la vitesse de refroidissement de l'acier, et ce n'est qu'isolément que l'on y rencontre des indications concernant le point de transformation.

Pour obtenir des vitesses de refroidissement variables on peut, soit

(1) Séance du 21 mai 1917.

modifier les conditions de trempe pour des échantillons identiques, soit modifier la masse des échantillons, les conditions de trempe restant les mêmes; ce dernier moyen est de beaucoup le plus maniable et permet d'obtenir au centre de l'échantillon telle vitesse moyenne que l'on désire. On peut critiquer dans ce procédé l'écart qui existe entre les vitesses de refroidissement des régions centrales et périphériques de l'échantillon qui, par suite, ne se transforment pas à la même époque; mais de toute façon on mesure la température du point en contact avec la soudure du couple, et il est possible de discerner l'influence des autres portions de la masse et de leur attribuer la part qui leur revient dans le phénomène enregistré.

Les difficultés signalées plus haut ont été surmontées en adoptant le dispositif expérimental décrit dans une Note précédente [1] où l'on trouvera toutes indications utiles. Nous avons donc opéré sur des cylindres homothétiques de diamètres variant de 8^{mm} à 20^{mm} et de hauteur $h = 3d$, pris dans des aciers de nuances diverses.

Une autre difficulté provient de la lenteur des transformations à basse température; le dégagement de chaleur s'étend sur un grand intervalle de temps et le relèvement de la courbe est à peine discernable, et il faut recourir à la comparaison avec un métal sans point de transformation.

Les conditions dans lesquelles cette comparaison est valable et possible ont été précisées dans la Note précitée; elles conduisent à l'utilisation comme terme de comparaison d'aciers trempés au-dessous de leur point de transformation et, à la suggestion de M. Le Chatelier, de l'acier à 30 pour 100 de nickel.

On aurait pu aussi, pour lever cette dernière difficulté, utiliser la méthode dilatométrique : mais elle nécessite l'emploi d'échantillons longs et minces, dont la température est très difficile à mesurer et dont on ne peut réaliser avec certitude le refroidissement homogène sur toute la longueur par immersion dans un liquide.

Les résultats obtenus peuvent se résumer ainsi :

1° Pour un acier donné et une température initiale de trempe donnée, l'abaissement du point de transformation pour des vitesses de refroidissement croissantes ne s'opère pas d'une manière progressive, et la transformation d'abord bien marquée à haute température sur les courbes est rejetée ensuite brusquement à basse température et ne peut plus alors s'observer sur les courbes que par la méthode de comparaison.

La figure 1 montre un exemple de la disparition du point de transformation à haute température pour des vitesses de refroidissement graduellement croissantes et la figure 2 montre la transformation lente à basse température.

---

(1) *Comptes rendus*, t. 159, 1914, p. 51.

2° Il y a donc des valeurs critiques de la vitesse de refroidissement marquant le changement dans la position et l'allure de la transformation.

3° Lorsqu'il y a transformation à haute température, on obtient de la troostite, lorsqu'il n'y a transformation qu'à basse température, de la martensite. Dans les aciers autres que l'eutectique, la troostite est toujours accompagnée du constituant proeutectique.

La discontinuité d'aspect entre la troostite et la martensite correspond bien à la discontinuité d'allure des courbes et au rejet de la transformation à basse température. On peut dire que la troostite est formée des mêmes constituants que la perlite à la grosseur des éléments près; l'écart de dureté provient de l'état de division des phases cémentite et ferrite.

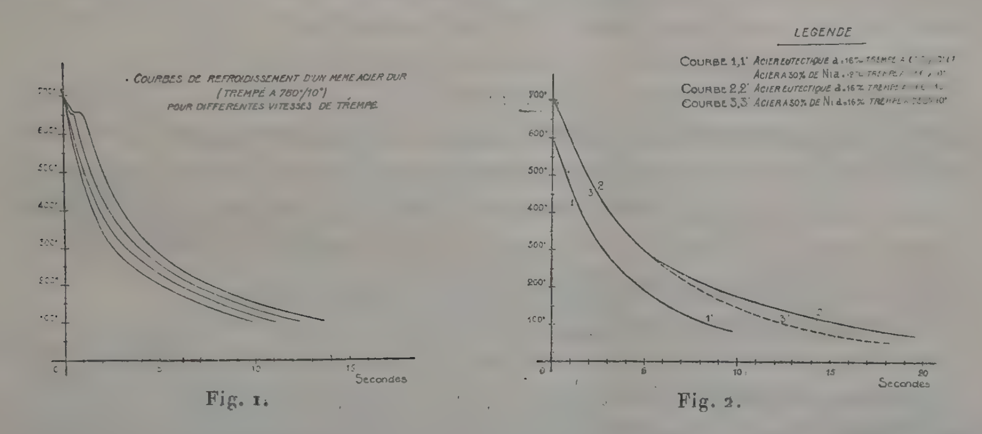


Fig. 1.

Fig. 2.

Quant à la martensite, son existence est corrélative d'une transformation qui s'amorce à basse température et s'opère avec une vitesse relativement faible; des expériences très récentes de C.-F. Brush et Sir R. Hadfield (¹) ont d'ailleurs mis en évidence un dégagement de chaleur à la température ordinaire dans les aciers après la trempe. Cette transformation est incomplète puisque par réchauffage on observe un dégagement irréversible de chaleur, déjà sensible à 100° (²), mais on ne saurait dire dans quelle mesure la présence d'austénite intervient dans ce dernier phénomène, car on ne peut apprécier les quantités relatives de ces constituants.

4° Lorsqu'il existe simultanément de la troostite et de la martensite, la courbe marque à la fois une anomalie à haute et une à basse température donnant l'apparence d'un dédoublement de la transformation.

(¹) *Proc. Roy. Soc.*, A, **93**, avril 1917, p. 188.

(²) H. Schottky, *Ferrum*, t. **1**, 1913, p. 274.

5° L'élévation de la température initiale, pour des conditions de trempe données, tend à rejeter la transformation à basse température.

6° La valeur critique de la vitesse de refroidissement, pour une température initiale donnée, dépend de la composition de l'acier. Elle ne varie pas toujours dans le même sens que la teneur en carbone de l'acier; il paraît y avoir un minimum pour la teneur eutectique.

Sous cet aspect, les phénomènes de trempe de l'acier ont des analogies avec ceux de surfusion et de sursaturation.

La notion de vitesse critique de trempe et l'influence de la température sur ce facteur ainsi acquises pour les aciers au carbone se retrouvent dans la trempe des aciers complexes : aciers nickel-chrome et chrome-tungstène, pour lesquels les phénomènes de dédoublement et de rejet à basse température des transformations sont facilement observables puisqu'ils ont lieu pour des refroidissements beaucoup moins rapides. Ces conceptions sont donc susceptibles d'une généralisation étendue et jouent un rôle prépondérant dans l'étude des deux phénomènes importants accompagnant la trempe des aciers : la pénétration de trempe et la génération des tapures.

BOTANIQUE. — *Sur quelques Microthyriacées.*
Note [1] de M. G. **Arnaud**, présentée par M. L. Mangin.

Nous avons indiqué récemment [2] la constitution générale du groupe des Microthyriacées; les caractères de certains types méritent une étude plus précise.

1. *Mycélium et hyphopodies*. — Le *Microthyrium microscopicum*, type du genre et de la famille, est resté mal connu jusqu'ici; en particulier, tous les auteurs ont passé sous silence le mycélium et Theissen, dans un travail récent, a exclu du genre toutes les espèces qui possédaient un mycélium externe. Cependant, *M. microscopicum* présente un mycélium externe brun clair qui rampe à la surface de la feuille et qui présente la disposition que nous avons décrite [3] chez *Microthyrium cantareirense* P. Henn. (synonyme, d'après Theissen, d'*Asterinella Puiggarii*, type du genre *Asterinella*), c'est-à-dire que presque toutes les cellules du mycélium envoient un prolongement qui perfore la cuticule et forme au-dessous d'elle un appareil absor-

---

[1] Séance du 29 mai 1917.
[2] *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 574.
[3] *Comptes rendus*, t. 159, 1915, p. 807.

bant; par suite, le genre *Asterinella* est probablement à réunir au genre *Microthyrium*, quoique chez *M. microscopicum* les ascospores n'aient été observées qu'à l'état de maturité incomplet et incolores.

La disposition du mycélium chez les deux *Microthyrium* cités permet de comprendre dans la nature d'organes les *hyphopodies* (hyphopodies ordinaires ou hyphopodies capitées de Gaillard) que les mycologues ont interprétés diversement; ces appendices, qui existent chez les *Meliola* comme chez les Microthyriacées stolonifères, ont été considérés d'abord comme des conidies, puis comme des organes femelles; ce sont simplement les *vestibules* des suçoirs ou plus généralement le point de réunion du mycélium externe avec le mycélium interne. Le mot *hyphopodie* a reçu des acceptions diverses : pour préciser, on peut appeler *stigmocystes* les cellules qui portent le canal de pénétration dont la projection apparaît dans la cellule comme un point clair, et *stigmopodies* les rameaux qui portent les stigmocystes, quand ces rameaux sont différenciés du mycélium ordinaire. Les deux termes se confondent quand les stigmopodies sont unicellulaires. Chez les *Microthyrium*, toutes les cellules du mycélium externe sont des stigmocystes non différenciés. Chez d'autres Microthyriacées il y a seulement quelques stigmocystes dispersées sur les filaments et renflées en forme de nœuds; chez *Lembosia globulifera* Pat., de tels stigmocystes ne se rencontrent que sur certains rameaux, ce qui est un premier indice d'une différenciation; enfin, chez les *Meliola* et la plupart des Microthyriacées stolonifères, les stigmocystes sont portés à l'extrémité de rameaux spéciaux courts formés d'une ou deux cellules : ce sont les stigmopodies.

Ces stigmopodies ont une forme et une disposition remarquablement fixes chez les types précédents, mais on trouve ailleurs des organes analogues, moins nettement différenciés; L. Mangin [1] a décrit et figuré une disposition assez semblable chez le mycélium rampant de *Leptosphæria herpotrichoides* et un peu aussi chez *Ophiobolus graminis*.

II. *Disposition des asques*. — Chez les Microthyriacées, le tissu ascogène se trouve en général à la base du conceptable d'où les asques se dressent verticalement et parallèlement. Chez les *Microthyrium* (inclus *Asterinella*) et quelques types voisins, les conceptables restent très plats, le tissu ascogène forme une couronne périphérique d'où les asques convergent vers le centre, ou plus exactement vers le sommet très bas du conceptable; au centre on

[1] L. Mangin, *Sur le Piétin ou maladie du pied du blé* [(*Bull. Soc. Myc. de France*, t. 15, 1899, p. 211 (p. 228, pl. XII, fig. 1 *a*, 2 *a* et pl. XIII)].

trouve souvent une colonne de tissu stérile paraphysoïde. Les *Trichothyrium* présentent la même disposition et ne sont que des *Microthyrium* adaptés au parasitisme sur un autre champignon superficiel (*Meliola* en général), mais ici le tissu paraphysoïde est nul ou très réduit.

Persuadé que les *Microthyrium* n'ont pas de mycélium externe, Theissen a placé dans ce genre le *Clypeolium Loranthi* Har. et Karst. qui forme le type d'un nouveau genre que l'on peut considérer comme un *Microthyrium* rhizomateux et dont la diagnose est la suivante :

« *Hariotula* gen. nov. Conceptables externes du type *Microthyrium*, naissant en grand nombre sur un mycélium commun interne; ascospores bicellulaires incolores ou brunes. Type *H. Loranthi* (Har. et Karst.) *nob.* Chez le type, le mycélium est subcuticulaire et les spores (non mûres) sont hyalines. »

III. *Microthyriacées phragmosporées.* — Les Microthyriacées superficielles ont presque toutes des spores bicellulaires; les exceptions sont très rares. Cependant deux espèces ont des spores pourvues de plusieurs cloisons et constituent deux genres voisins.

Halbania cyathearum Racib. présente un mycélium peu abondant, mais bien net, sans stigmocystes, certaines ramifications pénètrent par les stomates pour se mettre en relation avec le mycélium interne; ce mode de pénétration est peut-être général chez les Microthyriacées parasites des Filicinées, tandis qu'il est extrêmement rare chez les espèces du même genre, groupe parasite des Angiospermes.

Meliola clavispora Pat. est le type d'un nouveau genre de Microthyriacées qui se distingue du précédent par la présence des stigmopodies unicellulaires; les remarquables suçoirs de l'espèce ont été décrits précédemment [1] :

« *Patouillardina* nov. gen.; mycélium externe pourvu de stigmopodies et produisant des conceptacles externes de Microthyriacées; sans paraphyses; asques verticaux, parallèles, ellipsoïdes ou ovoïdes; ascospores brunes à plusieurs cloisons parallèles; type *P. clavispora* Pat. *nob.* »

Le genre phragmosporé *Amazonia* Theissen est placé par son auteur parmi les Microthyriacées, nous pensons qu'il doit rester dans les Méliolées (Dothidéacées stolonifères), malgré son apparence microthyrioïde; le type *A. psychotriæ* Th. est une ancienne variété de *Meliola asterinoides* Winter.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 159, 1915, p. 807.

PHYSIOLOGIE. — *A propos de l'horaire des repas.* Note de M. **Amar**, présentée par M. Dastre.

Dans une Note, insérée aux *Comptes rendus* du 29 mai dernier (t. 164, p. 848), M. Bergonié fixe entre 2500^{cal} et 3200^{cal} par 24 heures la ration alimentaire *de travail* d'un adulte, ouvrier ou employé; et il propose de donner cette provision d'énergie « le matin, vers 7^h30^m, sous forme d'un repas principal, riche de 1500^{cal} à 2000^{cal}, et le soir vers 18^h, par un repas *secondaire* (il veut sans doute dire : un *second* repas) de 1000^{cal} à 1200^{cal} (p. 849), ajoutant : « La journée de travail de 8 heures, limitée entre 9^h et 17^h par exemple, s'écoule tout entière sans repas intercalaire, laissant ainsi 16 *heures consécutives* de liberté à l'ouvrier et à l'employé ».

Les *expériences* de M. Bergonié, qui l'ont pu conduire à nous proposer ces règles physiologiques de la vie active de l'homme, ne sont pas connues. Si elles étaient publiées, il serait aisé de les confronter avec des faits depuis longtemps acquis, notamment avec les résultats des mesures calorimétriques de l'École américaine d'Atwater.

Mais on peut, on doit immédiatement répondre que la ration de travail de l'ouvrier, à laquelle M. Bergonié assigne un maximum de 3200^{cal}, dépasse généralement 4000^{cal}, et il est rare qu'elle s'abaisse à 3000^{cal}. Au surplus, l'auteur ne considère pas la seule saison d'été.

Reste la *répartition des heures de repas*.

Déjà en 1914, dans deux Notes des *Comptes rendus* (t. 158, 1914, p. 961 et 1079), M. Bergonié demandait que l'horaire de nos repas fût changé. Considérant la courbe des variations de la température extérieure, « le cycle nycthéméral » qui, pour une part seulement, règle notre dépense d'énergie, il dit : « Rationnellement, les disponibilités d'énergie, à chaque heure du cycle, devraient être commandées par la variation des besoins prochains.... On peut, s'appuyant sur les données acquises, essayer de tracer la courbe des besoins d'énergie du sujet à chaque heure, comme on a tracé la courbe des besoins électriques d'un réseau ou d'un secteur de ville, en comptant en ordonnées les dépenses énergétiques et en abscisses les heures [1]. »

Avant d'aller plus loin, notons que les variations de température du milieu extérieur n'ont pas la même allure tous les jours de l'année et que ouvriers et employés vivent, en général, dans des bureaux et des ateliers à température à peu près *invariable*.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 961.

Ces milieux obligent évidemment à une certaine déperdition de calorique, mais bien faible en comparaison de la dépense d'énergie que nécessite le *travail effectif*. Il est donc clair que :

Le cycle nycthéméral ne conditionne pas le mouvement énergétique de l'organisme animal. C'est affaire uniquement de l'action musculaire, du travail sous toutes ses formes, et du milieu atmosphérique.

Même à cet égard, M. Bergonié émet des considérations que condamnent les vrais principes de la Physiologie. Il s'agit, pense-t-il, « de faire correspondre les disponibilités d'énergie à la demande, *au même instant* »; et, reprenant sa comparaison avec un secteur électrique : « Quand, interroge-t-il, faudra-t-il charger les grilles? » (1).

Il importe de rectifier cette analogie, car la marche du moteur vivant est gouvernée, *heureusement*, par d'autres lois que les moteurs de l'industrie. Il ne livre pas du travail parce que, *au même instant* et en proportion, de l'énergie a été mise à sa disposition, faute de quoi il s'arrêterait. Non, absolument non. C'est, au contraire, le travail produit qui détermine et règle la consommation; le moteur animé pourrait travailler malgré la discontinuité, l'interruption de son alimentation. Il vit uniquement sur ses réserves anciennes. Chauveau, après Claude Bernard, avait démontré que : « Ce n'est pas ce qu'on mange *actuellement* qui fournit l'énergie employée aux travaux physiologiques de l'organisme, mais bien le potentiel fabriqué avec ce qu'on a mangé *antérieurement* » ; ce qui avait permis de conclure à « une vie sans à-coups, à l'abri des accidents de la consommation qui, sur les moteurs usuels, seraient fatals, en produisant leur arrêt complet » (2).

Il n'y a donc nulle nécessité, il y aurait plutôt inconvénient, à « charger les grilles », à alimenter l'homme « au même instant » où il doit travailler.

Que devient alors le nouvel horaire de M. Bergonié? A la vérité, ce savant avait préconisé, il y a trois ans, une répartition toute différente, savoir : un repas de 1500^{cal} fixé à 7^h30^m; « un autre repas sera bien placé vers 16^h30^m (thé), petit repas de 300^{cal} à 400^{cal} environ; enfin un troisième repas, moyen, vers 20^h (dîner), de 700^{cal} à 800^{cal} (3) ». Aujourd'hui, il n'est plus question que de 7^h30^m et 18^h (au lieu de 20^h).

N'importe. Retenons cette dernière formule, et voyons s'il convient d'adopter 7^h30^m et 18^h. M. Bergonié déclare avoir voulu, uniquement,

---

(1) *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 1079.

(2) JULES AMAR, *Le moteur humain*, p. 178, Paris, 1913; *Organisation physiologique du travail*, p. 104 et 145; Paris, 1917 (Dunod et Pinat, éditeurs).

(3) *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 1081 et 1082.

« être d'accord avec l'horaire de nos besoins de chaleur et de travail mécanique [être en *phase*, comme disent les électriciens (1)] ». Mais, à l'exception des travailleurs de nuit et des noctambules, c'est à partir de 18^h, ou mieux de 20^h, qu'on a le moins besoin d'énergie : on vient de quitter le travail; les muscles sont reposés et laissent aux organes digestifs la possibilité d'exercer leurs fonctions d'élaboration et de mise en réserve des aliments, pour une dépense future d'énergie.

La nuit, cette dépense s'atténue beaucoup, et ce n'est qu'au réveil, au cours du travail de la matinée, que nos réserves trouveront leur utilisation rationnelle. Toute surcharge alimentaire serait alors sans effet utile pour l'activité musculaire.

Aussi bien, l'heure de *midi* est-elle indiquée par les enseignements physiologiques les plus sûrs. A midi, on est au repos, le besoin d'énergie traverse un *minimum* (chiffres d'Atwater); on est à même d'accumuler des réserves, sans compter, pour l'ouvrier, le bénéfice de cette trêve au labeur de la journée, la réparation mieux assurée d'un organisme souvent fatigué, un repas de plus en famille.

L'habitude de prendre deux repas principaux, à midi et vers 8^h du soir, complétés par un petit déjeuner au réveil, se justifie donc au point de vue de l'*hygiène expérimentale et des lois de l'énergétique humaine*. Il convient enfin de rappeler ce qui fut établi en 1912 devant l'Académie (2). D'un ensemble de recherches précises on avait déduit que les *aliments hydrocarbonés* sont déjà utilisables 30 *minutes* après leur ingestion et font économiser 5 pour 100 sur la dépense de force, tandis que les *azotés* sont d'une utilisation onéreuse pendant les deux premières heures qui suivent le repas.

Dans ces conditions il serait avantageux, tout en travaillant et mangeant à nos heures habituelles, de consommer en abondance les féculents et les fruits, et de consacrer 90 *minutes* en moyenne à chacun des deux principaux repas.

MÉDECINE. — *Le temps nécessaire à l'apparition de la propriété antivirulente du sérum est fonction de la quantité de vaccin inoculée.* Note (3) de **M. L. Camus**, présentée par M. A. Laveran.

Dans une Note précédente (4) j'ai fait connaître que l'immunité vaccinale

(1) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 849.
(2) Jules Amar, *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 528.
(3) Séance du 29 mai 1917.
(4) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 338.

ne se produit pas toujours dans le même laps de temps, j'ai montré que l'organisme réagit avec une vitesse notablement différente suivant la quantité de vaccin mise en jeu. On peut ainsi obtenir, soit une immunisation rapide en injectant une forte dose de vaccin, soit une immunisation lente en employant une dose faible. C'est en observant les éruptions de vaccinations d'épreuves pratiquées après un temps plus ou moins éloigné de la première inoculation que j'ai mis ce fait en évidence. Cette méthode est très sûre, mais elle a l'inconvénient de ne pouvoir indiquer le moment précis où apparaît l'immunité. On sait, en effet, qu'entre l'inoculation et le début de la formation des pustules vaccinales, il y a une phase latente de 2 à 3 jours au minimum et il s'ensuit que le résultat négatif d'une vaccination d'épreuve n'implique pas fatalement que l'organisme était déjà immunisé au moment de la deuxième inoculation; l'immunité ayant pu s'établir pendant cette phase latente. Pour apprécier l'état d'immunité de l'organisme à un moment déterminé, il faut se servir d'une méthode qui permette d'éliminer l'influence du temps d'incubation, et c'est justement l'avantage que présente l'étude de l'activité virulicide du sérum des animaux immunisés. Le sérum sanguin d'un sujet immunisé, comme l'ont bien mis en évidence les belles recherches de MM. Béclère, Chambon et Ménard, fait perdre au vaccin mis à son contact tout ou partie de son activité, de telle sorte que l'inoculation du mélange (sérum d'immunisé + vaccin) est plus ou moins inefficace chez un animal réceptif au vaccin.

J'ai étudié, ici même, à plusieurs reprises [1], la propriété antivirulente du sérum sanguin des lapins immunisés et je désire montrer aujourd'hui que cette propriété donne d'intéressants renseignements sur la question du temps nécessaire à l'immunisation en fonction de la quantité de vaccin.

On reconnaîtra sans difficulté, je crois, à la lecture de cette Note, que la propriété virulicide, de même que l'immunité cutanée, apparaît d'une façon plus précoce quand la dose de vaccin introduite dans l'organisme est plus grande.

Parmi mes expériences je résumerai seulement les deux suivantes qui ont été faites simultanément sur deux animaux aussi identiques que possible. Ces deux lapins presque de même poids furent placés dans les mêmes conditions de vie et reçurent une injection intraveineuse de vaccin, l'un de $0^{cm^3},0005$, l'autre de $0^{cm^3},2$ par kilogramme. Quatre prises de sang, pour l'étude du sérum, furent faites à chaque animal; la première avant l'injection, la deuxième au cinquième jour, la troisième au huitième jour et la quatrième au douzième jour. Au cinquième jour, immédiatement après la deuxième saignée, on a pratiqué une vaccination d'épreuve d'une étendue très limitée,

---

[1] *Comptes rendus*, t. 146, 1908, p. 991 et 1117; t. 155, 1912, p. 75 et 237.

d'une part, sur la peau du dos par stries et, d'autre part, sur le bord des narines par piqûres.

Chez le premier animal la faible quantité de vaccin injectée n'a modifié ni la température, ni le poids; cette inoculation n'a d'ailleurs été suivie d'aucune formation de pustules. La vaccination d'épreuve a seulement provoqué pendant 3 jours une élévation de température de un degré en moyenne et l'apparition d'éléments vaccinaux aux points d'inoculations.

Chez le deuxième animal, la forte injection de vaccin a déterminé 5 jours de fièvre pendant lesquels la température s'est élevée à 41°,7. Les pustules spontanées ont apparu le troisième jour aux orifices naturels et à leur pourtour et ont évolué régulièrement. La courbe du poids, deux jours après l'apparition des pustules, s'est notablement abaissée, comme il est de règle, et ne s'est relevée que lentement ensuite.

α. *Renseignements fournis par la vaccination d'épreuve.* — La vaccination d'épreuve faite au cinquième jour a montré que le lapin qui avait reçu la faible injection n'avait presque rien perdu de sa réceptivité naturelle, tandis que le second, à la suite de la forte injection, était devenu à peu près complètement réfractaire à la vaccination.

Chez le premier, quatre stries de 2,5 centimètres pratiquées sur la peau du dos rasée, avec une dilution à $\frac{1}{1000}$ de vaccin très actif, se sont recouvertes respectivement de 9, 5, 12 et 5 belles pustules, tandis que chez le second, quatre stries semblables ont fait simplement apparaître de minces croûtelles sans caractère pustuleux. Les narines et la muqueuse buccale piquées en quatre points avec la dilution à $\frac{1}{10}$ du même vaccin ont donné chez le premier lapin quatre pustules un peu plus petites que celles provoquées chez un animal témoin et dont la dessiccation a été un peu plus précoce, alors que chez le deuxième lapin les mêmes piqûres n'ont donné lieu à aucune réaction.

β. *Renseignements fournis par l'étude de l'activité virulicide du sérum.* — Cette recherche a mis nettement en évidence que le sérum de l'animal qui a reçu la plus faible dose de vaccin est devenu virulicide beaucoup plus tardivement que celui du lapin qui a reçu la plus forte dose.

Les sérums des trois premières saignées pratiquées au lapin qui a reçu la faible dose de vaccin se sont montrés complètement inactifs, seul celui de la quatrième saignée s'est révélé actif.

Le sérum du lapin qui avait reçu la forte dose de vaccin était non seulement plus fortement virulicide à la quatrième saignée, mais il était déjà doué de cette propriété à la troisième et même un peu à la deuxième saignée.

Voici d'ailleurs, à titre d'exemple, les résultats fournis par l'ensemencement, sur la peau d'un animal réceptif, des huit mélanges de sérum et de vaccin :

	Sérums du lapin qui a reçu	
	la faible dose.	la forte dose.
Le mélange (vaccin + sérum 1re saignée) a donné (pustules)...	60	47
Le mélange (vaccin + sérum 2e saignée) a donné (pustules)...	67	19
Le mélange (vaccin + sérum 3e saignée) a donné (pustules)...	75	3
Le mélange (vaccin + sérum 4e saignée) a donné (pustules)...	12	3

Les résultats de ces deux procédés d'étude de l'immunité, la vaccination

d'épreuve d'une part et la détermination de l'activité virulicide du sérum d'autre part, ont une concordance remarquable. La vaccination d'épreuve est inefficace à une époque d'autant plus précoce que la quantité de vaccin primitivement employée est plus forte; et de même, le pouvoir virulicide du sérum apparaît beaucoup plus tôt quand la quantité de vaccin inoculée est plus grande ([1]).

En somme, que l'état d'immunité soit estimé d'après la réaction cutanée à une vaccination d'épreuve ou qu'il soit apprécié d'après le développement de l'activité virulicide du sérum, il est nettement démontré qu'on ne doit plus se contenter, comme autrefois, d'envisager simplement le temps écoulé après l'inoculation, mais qu'il faut en outre tenir compte de la quantité de vaccin qui a servi à provoquer l'immunité. L'apparition de l'immunité est, en définitive, fonction non seulement du temps, mais aussi de la quantité de vaccin mise en jeu.

A 16 heures l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section d'Économie rurale, par l'organe de son Doyen, M. Th. Schlœsing, présente la liste suivante de candidats à la place devenue vacante par le décès de M. *Chauveau* :

En première ligne	M. LECLAINCHE
En deuxième ligne, ex æquo	MM. MOUSSU
et par ordre alphabétique	VALLÉE

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 17 heures.

E. P.

([1]) Si une méthode suffisamment sensible pouvait révéler la moindre activité virulicide du sérum, il est probable qu'on en reconnaîtrait l'existence beaucoup plus tôt après la vaccination et l'on serait amené à conclure que ce qui varie réellement à l'origine avec la quantité de vaccin employée, ce n'est pas l'époque du début de la réaction mais bien la quantité de substance virulicide formée.